



SCIENCES SUP

Mathématiques appliquées pour le Master / SMAI

ANALYSE NUMÉRIQUE MATRICIELLE

- ▶ Cours
- ▶ Exercices
- ▶ Corrigés détaillés

Luca Amodei
Jean-Pierre Dedieu

ANALYSE NUMÉRIQUE MATRICIELLE

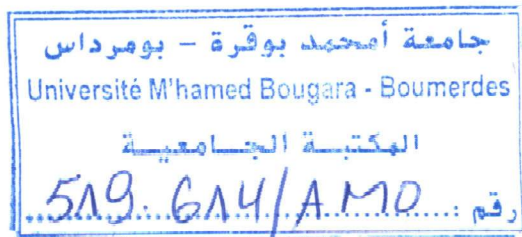
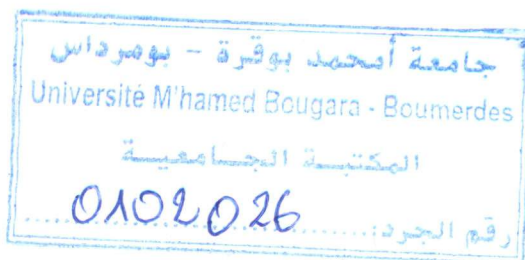
Cours et exercices corrigés

Luca Amodei

Maître de conférences à l'Institut
de Mathématiques de Toulouse

Jean-Pierre Dedieu

Professeur à l'Institut
de Mathématiques de Toulouse



2eap.

Table des matières

AVANT-PROPOS	v
CHAPITRE 1 • RAPPELS D'ALGÈBRE LINÉAIRE	1
1.1 Notations	1
1.2 Rang et noyau d'une matrice	2
1.3 Déterminant	3
1.4 Valeurs propres et vecteurs propres	3
1.5 Sous-espaces caractéristiques et théorème de Cayley-Hamilton	5
1.6 Décomposition de Jordan	6
1.7 Trace	6
1.8 Produit hermitien	7
1.9 Produit scalaire	8
1.10 Matrices unitaires	9
1.11 Matrices orthogonales	10
1.12 Matrices hermitiennes, symétriques, normales	10
1.13 Projections orthogonales	11
1.14 Matrices par blocs	12
1.15 Décomposition de Schur	15
1.16 Notes et références	17
EXERCICES	19

CHAPITRE 2 • L'ARITHMÉTIQUE « VIRGULE FLOTTANTE »	25
2.1 Les nombres flottants	25
2.2 Arrondis	26
2.3 L'arithmétique flottante	28
2.4 Exemple : le calcul du produit scalaire	28
2.5 Notes et références	31
EXERCICES	32
CHAPITRE 3 • NORMES SUR LES ESPACES DE MATRICES	33
3.1 Norme d'opérateur	33
3.2 Rayon spectral	35
3.3 La norme spectrale	36
3.4 La norme de Frobenius	37
3.5 Le théorème de perturbation de Neumann	39
3.6 Notes et références	40
EXERCICES	41
CHAPITRE 4 • LA DÉCOMPOSITION EN VALEURS SINGULIÈRES	47
4.1 Définition	47
4.2 Calcul des valeurs singulières	49
4.3 Notes et références	49
EXERCICES	50
CHAPITRE 5 • LE PROBLÈME DES ERREURS	53
5.1 Introduction	53
5.2 Concepts généraux	55
5.3 Le théorème des fonctions implicites	57
5.4 Le cas des systèmes linéaires : conditionnement d'une matrice ..	61
5.5 Le cas des systèmes linéaires : erreurs inverses	64

5.6	Préconditionnement d'un système linéaire	64
5.7	Notes et références	65
	EXERCICES	67
CHAPITRE 6 • PIVOT DE GAUSS ET DÉCOMPOSITION LU		69
6.1	Résolution des systèmes triangulaires	69
6.2	L'élimination de Gauss	70
6.3	Décomposition LU	71
6.4	Pivot partiel, pivot total	74
6.5	Complexité	80
6.6	Conditionnement de la décomposition LU	81
6.7	Notes et références	83
	EXERCICES	84
CHAPITRE 7 • MATRICES DÉFINIES POSITIVES ET DÉCOMPOSITION DE CHOLESKY		87
7.1	Matrices définies positives	87
7.2	Quadriques et optimisation	91
7.3	Racine carrée d'une matrice, décomposition polaire	95
7.4	La décomposition de Cholesky	96
7.5	Complexité de la décomposition	97
7.6	Conditionnement de la décomposition de Cholesky	98
7.7	Notes et références	100
	EXERCICES	101
CHAPITRE 8 • LA DÉCOMPOSITION QR		107
8.1	Matrices de Stiefel	107
8.2	Décomposition QR	108
8.3	L'orthonormalisation de Gram-Schmidt	109
8.4	Rotations de Givens	113

8.5	La méthode de Householder	116
8.6	Réduction à la forme de Hessenberg	121
8.7	Tridiagonalisation d'une matrice hermitienne	124
8.8	L'algorithme d'Arnoldi	125
8.9	L'algorithme de Lanczos	129
8.10	Conditionnement de la décomposition QR	132
8.11	Notes et références	137
	EXERCICES	138
CHAPITRE 9 • INVERSES GÉNÉRALISÉS ET MOINDRES CARRÉS		141
9.1	Inverses généralisés	141
9.2	Moindres carrés	146
9.3	Problèmes surdéterminés	151
9.4	Etude d'un exemple : l'équation $AX = B$	154
9.5	Notes et références	155
	EXERCICES	156
CHAPITRE 10 • MÉTHODES ITÉRATIVES		161
10.1	Résultats généraux	162
10.2	Choix d'un test d'arrêt	164
10.3	Exemples de méthodes itératives	166
10.4	Convergence des méthodes itératives	168
10.5	Exemples	173
10.6	Méthodes itératives et préconditionnement	174
10.7	Notes et références	175
	EXERCICES	176
CHAPITRE 11 • MÉTHODES DE PROJECTION SUR DES SOUS-ESPACES DE KRYLOV		181
11.1	Structure générale d'une méthode de projection	182

11.2	Espaces de Krylov et réduction de Hessenberg	182
11.3	La méthode GMRES	185
11.4	La méthode du gradient conjugué	188
11.5	Analyse d'erreur	195
11.6	Notes et références	199
	EXERCICES	201
CHAPITRE 12	• VALEURS PROPRES : SENSIBILITÉ	203
12.1	Le théorème de Gershgorin	203
12.2	Le théorème d'Elsner	204
12.3	Sensibilité via le théorème des fonctions implicites	206
12.4	Notes et références	210
	EXERCICES	211
CHAPITRE 13	• SOUS-ESPACES INVARIANTS	213
13.1	Sous-espaces invariants, simples, complémentaires	213
13.2	Forme réduite	216
13.3	Équation de Sylvester	217
13.4	Diagonalisation par blocs d'une matrice	220
	EXERCICES	222
CHAPITRE 14	• LE CALCUL DES VALEURS PROPRES	225
14.1	La méthode de la puissance	225
14.2	Itération de sous-espaces	230
14.3	La méthode QR	236
14.4	Le cas des matrices réelles	241
14.5	L'utilisation de la forme Hessenberg	242
14.6	La stratégie du décalage	243
14.7	Remarques finales	246
14.8	Notes et références	247

EXERCICES	249
CHAPITRE 15 • MÉTHODES DE PROJECTION POUR LE PROBLÈME DES VALEURS PROPRES	251
15.1 Principe d'une méthode de projection pour le problème des valeurs propres	251
15.2 Méthode de projection sur des sous-espaces de Krylov	253
15.3 Notes et références	256
EXERCICES	257
CHAPITRE 16 • EXEMPLES DE SYSTÈMES LINÉAIRES	259
16.1 Le problème de Poisson discrétisé par différences finies	259
16.2 Le problème de Poisson sur un carré discrétisé par différences finies	261
16.3 Le problème de Poisson discrétisé par éléments finis	262
16.4 La matrice de Vandermonde	264
16.5 La matrice de Fourier	265
16.6 Système linéaire associé à la spline cubique d'interpolation	267
16.7 Notes et références	268
EXERCICES	270
CHAPITRE 17 • GAUSS-NEWTON ET L'ASSIMILATION DES DONNÉES	271
17.1 La méthode de Newton	271
17.2 Gauss-Newton et moindres carrés	272
17.3 Le problème de l'assimilation des données	273
CORRIGÉS DES EXERCICES	281
BIBLIOGRAPHIE	309
INDEX	313

Luca Amodei
Jean-Pierre Dedieu

ANALYSE NUMÉRIQUE MATRICIELLE

Cet ouvrage est destiné aux étudiants en Master de mathématiques appliquées, aux élèves ingénieurs, ainsi qu'aux candidats au CAPES ou à l'Agrégation.

Il propose un panorama des problèmes abordés en analyse numérique matricielle : normes sur les espaces de matrices, décompositions matricielles, méthodes directes ou itératives de résolution des systèmes linéaires, problèmes des valeurs propres. On y aborde les aspects théoriques de ces questions, l'algorithmique qui y est associée ainsi que les problèmes de complexité, de sensibilité aux erreurs et de stabilité. Le cours est illustré par des exercices corrigés qui mettent en œuvre les techniques introduites dans chaque chapitre.

JEAN-PIERRE DEDIEU

est professeur à l'Institut de Mathématiques de Toulouse. Ses travaux de recherche portent sur l'algèbre linéaire, l'optimisation, la résolution de systèmes d'équations polynomiales et les problèmes de complexité sur les réels.

LUCA AMODEI

est maître de conférences à l'Institut de Mathématiques de Toulouse. Ses centres d'intérêt sont l'algèbre numérique matricielle, la théorie de l'approximation, l'optimisation et le contrôle optimal.

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

SCIENCES DE LA VIE

SCIENCES DE LA TERRE

SMAT'



9 782100 520855

6656615

ISBN 978-2-10-052085-5

LICENCE	MASTER	DOCTORAT
1	2	3
4	5	6
7	8	

www.dunod.com

