

MATHÉMATIQUES à l'Université

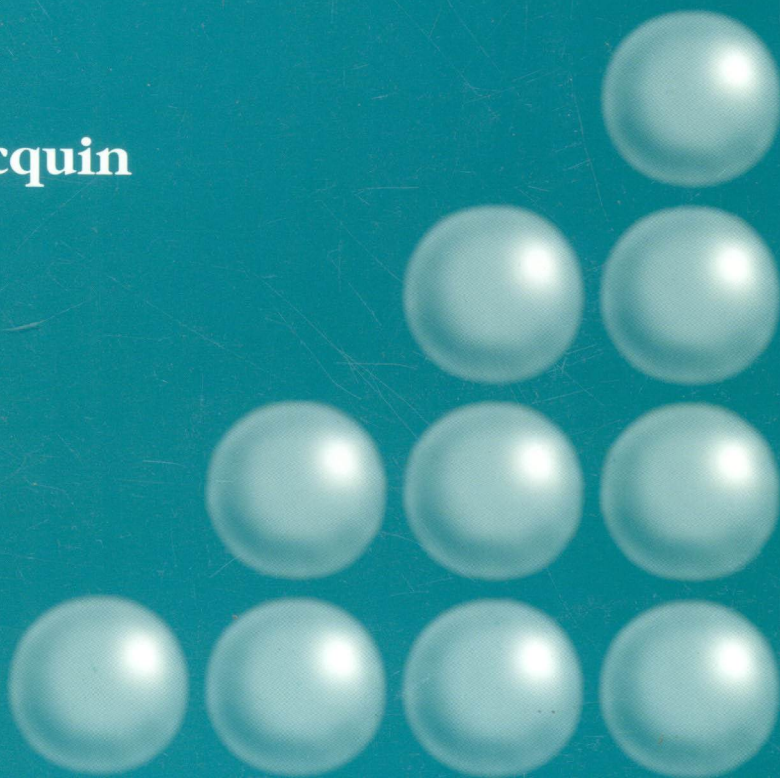
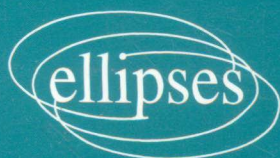
Cours et exercices corrigés

Collection dirigée par
Charles-Michel Marle
Philippe Pilibossian

Équations aux dérivées partielles et leurs approximations

 *niveau M1*

Brigitte Lucquin



MATHÉMATIQUES À L'UNIVERSITÉ

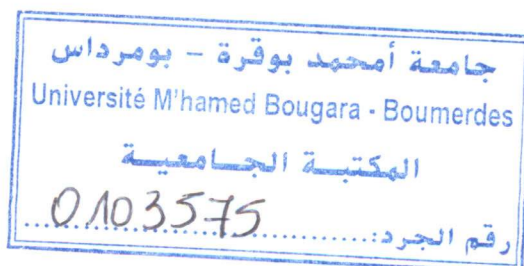
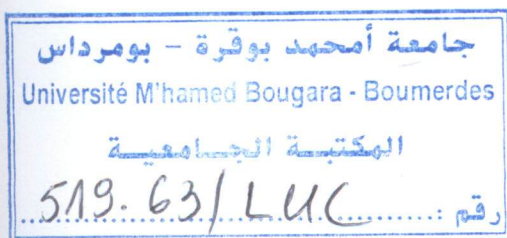
Collection dirigée par Charles-Michel MARLE et Philippe PILBOSSIAN



ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET LEURS APPROXIMATIONS

Brigitte LUCQUIN

Maître de conférences à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)



leap.



Table des matières

I	Introduction	1
I	Motivation et rappels	3
1	Exemples de problèmes modèles	3
2	Quelques rappels et notations	8
2.1.	Rappels d'analyse	9
2.2.	La géométrie du domaine	10
2.3.	Formules de Green	11
3	Classification des équations	12
3.1.	Équations elliptiques, paraboliques et hyperboliques	12
3.2.	Conditions aux limites	13
II	Introduction aux distributions et aux espaces de Sobolev	15
1	Les distributions	15
1.1.	L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$	15
1.2.	L'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions sur Ω	16
1.3.	Dérivation des distributions	17
1.4.	Convergence des distributions	19
1.5.	Quelques compléments sur les distributions	20
2	Notions sur les espaces de Sobolev	20
2.1.	Introduction	20
2.2.	L'espace $H^1(\Omega)$ et ses généralisations	21
2.3.	L'espace $H_0^1(\Omega)$	22
3	Notions de traces sur Γ de fonctions de $H^1(\Omega)$	24
3.1.	Cas mono-dimensionnel	25
3.2.	Cas du demi-espace	26
3.3.	Cas général et prolongements	27
III	Exercices de la partie I	29
1	Enoncés	29
2	Corrigés	31
II	Formulation variationnelle de problèmes aux limites	37
IV	Formulation variationnelle et théorème de Lax-Milgram	39
1	Un problème modèle	39
1.1.	Formulation variationnelle du problème	39
1.2.	Interprétation du problème variationnel	40
2	Autres exemples classiques	41
2.1.	Problème de Dirichlet non homogène	41
2.2.	Problème de Neumann non homogène	42
3	Le théorème de Lax-Milgram	43
3.1.	Quelques rappels d'analyse hilbertienne	43
3.2.	Le cadre fonctionnel du problème variationnel	44
3.3.	L'énoncé du théorème	45
3.4.	Le cas particulier d'une forme symétrique	46
3.5.	Le problème de la continuité par rapport aux données	47
3.6.	Complément : résolution d'inéquations variationnelles	47

V	Exemples d'application du théorème de Lax-Milgram	49
1	Le problème de Dirichlet homogène	49
2	Le problème de Dirichlet non homogène	51
3	Le problème de Neumann	51
4	Un problème avec conditions aux limites mixtes	53
4.1.	Formulation variationnelle du problème	54
4.2.	Résolution du problème variationnel	54
4.3.	Interprétation du problème variationnel	55
4.4.	Résultat final	56
5	Problème avec conditions aux limites de type Robin	56
6	Problèmes elliptiques généraux du second ordre	58
7	Problèmes non symétriques	60
8	Un exemple de problème d'ordre 4	61
9	Conclusion et remarques	62
9.1.	Stratégie générale	62
9.2.	Problème de la régularité	63
9.3.	Un exemple d'utilisation de la régularité	64
VI	Exercices de la partie II	65
1	Enoncés	65
2	Corrigés	68
III	Approximation par la méthode des éléments finis	73
VII	Présentation de la méthode des éléments finis	75
1	Principe de la méthode	75
1.1.	Le but	75
1.2.	La stratégie utilisée	75
1.3.	Résolution du problème variationnel approché	76
1.4.	Calcul effectif de la solution approchée	77
2	Mise en œuvre de la méthode en dimension un	78
2.1.	Résolution du problème continu	78
2.2.	Construction de l'espace variationnel discret	78
2.3.	Calcul de la solution approchée	80
2.4.	Programmation de la méthode	82
2.5.	Estimation de l'erreur	84
3	Exemple d'un problème d'ordre 4 en dimension un	85
3.1.	L'espace variationnel discret	85
3.2.	Calcul de la solution discrète	87
3.3.	Estimation d'erreur	89
VIII	La méthode des éléments finis en dimension deux	91
1	Introduction	91
2	Éléments finis rectangulaires	92
2.1.	Approximation par éléments finis Q^1 du problème modèle	92
2.2.	Un élément fini Q^2	103
2.3.	Un élément fini Q^3	106
3	Éléments finis triangulaires	110
3.1.	Approximation par éléments finis P^1 du problème modèle	110
3.2.	Un élément fini triangulaire de type P^2	118
3.3.	Construction d'un élément fini de type P^3	120
3.4.	Construction d'un élément fini de type P^5	121
4	Un exemple d'estimation d'erreur	121
5	Un exemple de système : les équations de Lamé	124
IX	Exercices de la partie III	127
1	Enoncés	127
2	Corrigés	130

IV Approximation par la méthode des différences finies ; application à la résolution numérique des problèmes d'évolution 137

X	Principe de la méthode des différences finies	139
1	Introduction	139
1.1.	Motivation	139
1.2.	Principe de la méthode	139
2	Application à la résolution du problème modèle en dimension un	140
2.1.	Approximation de la dérivée seconde	141
2.2.	Approximation du problème modèle par un schéma de différences finies	142
2.3.	Quelques rappels d'analyse numérique matricielle	145
2.4.	Preuve du théorème 2.5	147
3	Prolongements	148
3.1.	Conditions aux limites de type Neumann	148
3.2.	Principe de la méthode en dimension deux	150
3.3.	Cas d'un domaine quelconque en dimension deux	151
XI	L'équation de la chaleur. Approximation par différences finies	153
1	Le problème continu	153
1.1.	Unicité et continuité par rapport aux données des solutions régulières	153
1.2.	Construction d'une solution très régulière	156
1.3.	Existence d'une solution faible	158
1.4.	Remarque concernant l'équation de la chaleur sur la droite réelle	164
2	Approximation par différences finies	164
2.1.	Construction de quelques schémas d'approximation	165
2.2.	Convergence d'un schéma numérique	171
2.3.	Stabilité d'un schéma numérique	173
2.4.	Stabilité en norme $ \cdot _h$ des schémas du paragraphe 2.1.	174
2.5.	Stabilité par la méthode de Fourier	179
2.6.	Stabilité par la méthode de l'énergie	184
3	Approximation mixte et prolongements	185
3.1.	Approximation mixte : différences finies en temps et éléments finis en espace	185
3.2.	Prolongements	187
XII	L'équation des ondes. Approximation par différences finies	189
1	Le problème continu	189
1.1.	Inégalité d'énergie et unicité des solutions régulières	189
1.2.	Construction d'une solution formelle	191
1.3.	Remarque concernant l'équation des ondes sur la droite réelle	193
2	Approximation par différences finies	194
2.1.	Quelques schémas explicites	195
2.2.	Quelques schémas implicites	202
XIII	Exercices de la partie IV	205
1	Enoncés	205
2	Corrigés	213
	Bibliographie	223
	Index	225

La collection *Mathématiques à l'Université* se propose de mettre à la disposition des étudiants de troisième, quatrième et cinquième années d'études supérieures en mathématiques des ouvrages couvrant l'essentiel des programmes actuels des universités françaises. Certains de ces ouvrages pourront être utiles aussi aux étudiants qui préparent le CAPES ou l'agrégation, ainsi qu'aux élèves des grandes écoles.

Nous avons voulu rendre ces livres accessibles à tous : les sujets traités sont présentés de manière simple et progressive, tout en respectant scrupuleusement la rigueur mathématique. Chaque volume comporte un exposé du cours avec des démonstrations détaillées de tous les résultats essentiels et de nombreux exercices. Les auteurs de ces ouvrages ont tous une grande expérience de l'enseignement des mathématiques au niveau supérieur.

Les équations aux dérivées partielles interviennent dans de très nombreux domaines appliqués, voire industriels (ingénierie, mécanique, physique, finance, biologie, ...). Il paraît donc essentiel de bien comprendre les propriétés de ces équations, en vue de leur approximation numérique.

L'objectif de ce cours est d'analyser mathématiquement différents problèmes modèles linéaires (problèmes aux limites elliptiques, problèmes paraboliques et hyperboliques), puis de proposer, pour chacun d'eux, des méthodes d'approximation (éléments finis, différences finies), en vue de leur résolution numérique.

Le contenu de cet ouvrage est celui d'un cours de quatrième année actuellement enseigné à l'université (niveau Master, première année). Ce livre s'adresse aussi aux élèves de troisième année d'écoles d'ingénieurs et aux étudiants de DESS de mathématiques appliquées. Il est structuré en quatre parties, chacune d'elles se terminant par un chapitre d'exercices.

