

Mathématiques pour DEUC

collection dirigée par Philippe PILIBOSSIAN

ANALYSE 3

Séries numériques
Suites et séries de fonction
Intégrales

Claude SERVIEN

MATHÉMATIQUES POUR DEUG

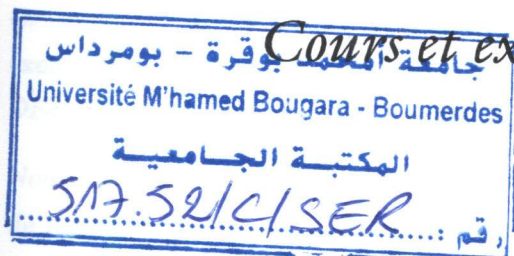
collection dirigée par Philippe PILIBOSSIAN

DEUG SCIENCES



ANALYSE 3

Séries numériques,
suites et séries de fonctions,
intégrales



1924f.

Claude SERVIEN

Maître de conférences

à l'université Pierre et Marie Curie (Paris VI)

Table des matières

Présentation de la collection	5
Avant-propos	7
Alphabet grec	11
Notations	13
Chapitre I. SÉRIES NUMÉRIQUES	15
1 Séries à termes réels ou complexes	15
1.1 Définitions	15
1.2 Une condition nécessaire de convergence	16
1.3 Espace vectoriel des séries convergentes	16
1.4 Suite de Cauchy	16
2 Séries à termes positifs	17
2.1 Critères de comparaison	17
2.2 Comparaison d'une série et d'une intégrale	20
3 Convergence absolue	21
3.1 Critères de convergence absolue	21
3.2 Somme et produit de séries absolument convergentes	21
4 Semi-convergence	22
4.1 Critère d' Abel	22
4.2 Séries alternées	23
4.3 Exemples	24
5 Convergence commutative	24
5.1 Sommation par paquets	25
6 Séries à termes dans un espace vectoriel normé	26
7 Exercices	27
8 Solutions des exercices	30
Chapitre II. SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS	41
1 Suites de fonctions	41
1.1 Convergence simple	41
1.2 Convergence uniforme	41
1.3 Interprétation graphique de la convergence uniforme	42
1.4 Critères de convergence uniforme	42
1.5 Convergence compacte	43
1.6 Implications entre les types de convergence	43
1.7 Limite d'une suite de fonctions continues	43
1.8 Limite d'une suite de fonctions dérivables	44
1.9 Limite d'une suite de fonctions intégrables	45
2 Séries de fonctions	45
2.1 Définitions	45
2.2 Différents types de convergence	46
2.3 Implications entre les types de convergence	47
2.4 Critères de convergence des séries de fonctions	48
2.5 Propriétés de la somme d'une série convergente	49
2.6 Exemples	50
3 Produit infini	50
3.1 Logarithme complexe	50
3.2 Produit infini	50

4 ANNEXE : Topologies de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$	5
4.1 Norme	5
4.2 Ouverts et fermés	5
4.3 Bornés	5
4.4 Compacité	5
4.5 Différentes caractérisations des compacts	5
4.6 Continuité	5
4.7 Espace complet	5
5 Exercices	5
5.1 Suites de fonctions	5
5.2 Séries de fonctions	5
6 Solutions des exercices	5
6.1 Suites de fonctions	5
6.2 Séries de fonctions	6
Chapitre III. INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES	6
1 Convergence d'une intégrale	6
1.1 Rappel de la définition d'une fonction intégrable au sens de Riemann	6
1.2 Intégrale généralisée ou impropre	7
2 Critères de convergence	7
2.1 Critère de CAUCHY	7
2.2 Critères de convergence pour les fonctions positives	7
2.3 Convergence absolue	7
2.4 Comparaison d'une série et d'une intégrale	7
2.5 Semi-convergence	7
3 Exercices	8
4 Solution des exercices	8
Chapitre IV. FONCTIONS DÉFINIES PAR UNE INTÉGRALE	9
1 Intégrales définies	9
1.1 Continuité	9
1.2 Dérivabilité	9
1.3 Intégrabilité	9
2 Différents types de convergence d'intégrales généralisées	9
2.1 Critères et implications entre les convergences	9
2.2 Critère de convergence normale ou convergence dominée	9
2.3 Exemples	9
3 Continuité d'une fonction définie par une intégrale généralisée	9
4 Dérivabilité	10
5 Intégrale généralisée et série	10
6 Exercices	10
7 Solutions des exercices	10
Index terminologique	12
Formulaire de trigonométrie	12

Cette collection est un ensemble de manuels de Mathématiques destinés aux étudiants en DEUG-Sciences. Chaque volume comprend le cours sous la forme la plus dépouillée — tout en gardant la rigueur mathématique —, des exercices en application du cours et leurs solutions détaillées, fruit de plusieurs années d'expérience d'enseignement en premier cycle.

Ainsi, l'étudiant peut travailler seul en s'entraînant à la résolution des exercices ou en complétant ses notes de cours.

Ce volume traite plus particulièrement de l'Analyse du second niveau ; on y trouvera les séries numériques, les suites et séries de fonctions, les convergences d'intégrales et les fonctions définies par des intégrales.