

Gema-Maria Díaz-Toca
Henri Lombardi
Claude Quitté

Modules sur les
anneaux commutatifs
Cours et exercices

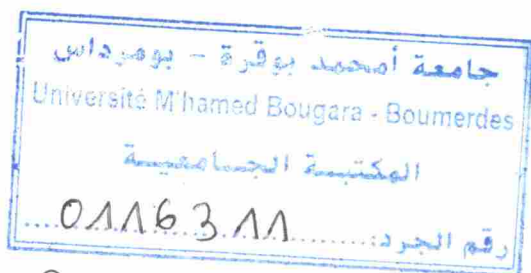
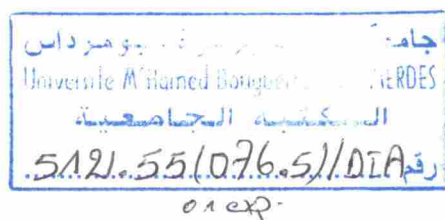


Calvage & Mounet

G.-M. Díaz-Toca, H. Lombardi, C. Quitté

Modules sur les anneaux commutatifs

Cours et exercices



Calvage & Mounet

Table des matières

Avant-Propos	xiii
------------------------	------

Première partie Modules sur les anneaux principaux

I Arithmétique de base

Introduction	3
1 On a le droit de calculer modulo n	4
2 L'algorithme d'Euclide	5
3 Théorème des restes chinois sur $\mathbb{Z}$	8
4 Systèmes d'équations linéaires sur $\mathbb{Z}$	9

II Groupes et anneaux commutatifs

Introduction	18
1 Groupes commutatifs	18
2 Anneaux commutatifs	29
3 Quelques rappels sur la théorie de la divisibilité	51

III Calcul matriciel sur un anneau commutatif arbitraire

Introduction	63
1 Calcul matriciel et systèmes de Cramer	64
2 Idéaux déterminantiaux	67
3 Pivot chinois généralisé, splitting off	71
4 Systèmes linéaires sur le corps de fractions	73
5 Systèmes linéaires sur un anneau intègre	82

IV Systèmes linéaires sur un anneau principal

Introduction	85
1 Domaines de Bezout et anneaux principaux	86
2 Réduction de Smith d'une matrice sur un anneau principal	90
3 Systèmes linéaires sur un anneau principal	95

V Modules sur un anneau commutatif

Introduction	100
1 Définitions générales concernant les modules	101
2 Applications linéaires entre modules libres	105
3 Modules de type fini	109
4 Sommes et produits de modules	112
5 Factorisation d'applications linéaires	117
6 Dualité	123
7 Torsion, annulateurs	127
8 Modules monogènes	129
9 Un important résultat d'unicité	130
10 Suites exactes	131
11 Modules de présentation finie	136

VI Modules de présentation finie sur les anneaux principaux

Introduction	144
1 Structure des applications linéaires entre modules libres	144
2 Structure des modules de présentation finie	149
3 Dualité, intersections	156
4 Cohérence d'un module de présentation finie	158
5 Modules de présentation finie de torsion	161

VII Structure d'un endomorphisme

Introduction	168
1 Un $\mathbf{K}[X]$ -module intéressant	169
2 Forme réduite de Frobenius	172
3 Un exemple	176
4 Géométrie d'un endomorphisme, premiers pas	183
5 Utilisation du lemme des noyaux	186
6 Endomorphismes cycliques et sous-espaces stables	188
7 Endomorphismes semi-simples	198
8 Décomposition de Jordan-Chevalley-Dunford	204

VIII Anneaux et modules cohérents, noethériens

Introduction	211
1 Anneaux et modules cohérents	212
2 Méthode modulaire de calcul	217
3 Définition de la noethérianité	223
4 Propriétés noethériennes élémentaires	226
5 Les théorèmes de Hilbert et Noether	230

Deuxième Partie Approfondissements

IX Idéaux inversibles et domaines de Dedekind

Introduction	233
1 Principe local-global de base	234
2 Idéaux inversibles	235
3 Un exemple historique	242
4 Petit théorème de Kummer	248
5 Domaines de Dedekind à factorisation totale	252
6 Domaines de Prüfer	254

X Entiers sur un anneau commutatif

Introduction	264
1 Extensions d'anneaux, algèbres	264
2 Extensions finies, entières	265
3 Extensions libres finies	273
4 Extension d'un anneau intégralement clos	282

XI Anneaux d'entiers des corps de nombres

Introduction	285
1 Corps de nombres	286
2 Un peu plus d'arithmétique	290

XII Anneaux et modules de fractions

Introduction	297
1 Anneaux et modules de fractions	297
2 Principes local-globaux pour les modules	300
3 Principes local-globaux pour les anneaux	302

XIII Modules projectifs de type fini

Introduction	303
1 Modules projectifs de type fini sur un anneau arbitraire	304
2 Applications linéaires localement simples	308
3 Principes local-globaux	311
4 Rang d'un module projectif de type fini sur un anneau intègre	312
5 Les modules projectifs de type fini sont localement libres	314
6 Propriété caractéristique d'exactitude	316
7 Annexe : rang d'un module projectif de type fini, cas général	318

XIV Modules de présentation finie sur les domaines de Prüfer

Introduction	323
1 Un principe local-global pour les domaines de Prüfer	324
2 Noyau, image et conoyau d'une matrice	325
3 Domaines de Prüfer fortement discrets	329

XV Changement d'anneau de base

1 Présentation du problème	331
2 Solution du problème dans quelques cas importants	335
3 Somme directe de deux $\mathbf{A}$ -algèbres	338

XVI Dimension 0 et 1

Introduction	343
1 Anneaux zéro-dimensionnels	344
2 Anneaux arithmétiques	351
3 Anneaux intègres de dimension ≤ 1	355
4 Domaines de Prüfer de dimension ≤ 1	361

Annexes**A Une approche à la Kronecker des domaines de Prüfer**

Introduction	369
1 L'anneau de Kronecker	370
2 Le théorème de Kronecker	372
3 Quelques conséquences du théorème de Kronecker	375

B Domaines de Dedekind

Introduction	379
1 Domaines de Prüfer à factorisation partielle	380
2 Problèmes de factorisation dans les domaines de Dedekind	382
3 Extensions de domaines de Dedekind	387

Solutions, ou esquisses de solutions, des exercices

Solutions du chapitre I	391
Solutions du chapitre II	398
Solutions du chapitre III	407
Solutions du chapitre IV	418
Solutions du chapitre V	426
Solutions du chapitre VI	446
Solutions du chapitre VII	473

Solutions du chapitre VIII	483
Solutions du chapitre IX	486
Solutions du chapitre X	488
Solutions du chapitre XI	498
Solutions du chapitre XII	503
Solutions du chapitre XIII	506
Solutions du chapitre XIV	515
Solutions du chapitre XV	517
Solutions du chapitre XVI	522
Solutions de l'annexe B	531

Tables et index

Table des théorèmes	537
Index des notations	543
Index des termes	547

Réservée autrefois aux spécialistes, la théorie des modules a fini par convaincre les plus hésitants par son efficacité et, au fond, par sa simplicité. Raisonner en termes de modules c'est donner aux éléments de l'anneau un premier souffle de vie, un peu comme on fait avec les éléments d'un groupe quand on le fait agir. Mais, au delà de cet acte averti, cette théorie s'est imposée par la portée unifiante de ses méthodes et de ses résultats.

Le présent livre est un cours d'algèbre pour le Master 1, consacré précisément à la théorie des modules sur les anneaux commutatifs.

La première partie traite le cas des modules de présentation finie sur les anneaux principaux. Avec de belles applications à la solution des systèmes linéaires à coefficients entiers et à la structure des endomorphismes des espaces vectoriels de dimension finie, cette première partie s'avérera un outil précieux pour la préparation à l'agrégation.

La deuxième partie approfondit les notions développées dans la première, en traitant notamment les modules de présentation finie sur les anneaux d'entiers de corps de nombres, et, plus généralement, sur les anneaux de dimension 0 ou 1.

L'algèbre dans la tradition d'al-Khwarismi, Viète, Gauss, Galois, Bezout, Kummer et Kronecker est une science de nature algorithmique. Dans ce traité d'algèbre moderne, les auteurs se situent dans cette tradition et adoptent le point de vue constructif, pour lequel tous les théorèmes d'existence ont un contenu algorithmique explicite. En particulier, lorsqu'un théorème affirme l'existence d'un objet, solution du problème donné en hypothèse, un algorithme de construction de l'objet peut toujours être extrait de la démonstration qui en est donnée.

En ce sens, cet ouvrage est entièrement original, sans équivalent dans la littérature contemporaine. Les cent quatre-vingt-sept exercices, tous corrigés, permettront aux lecteurs de se convaincre de l'efficacité du point de vue constructif, tout en apportant parfois de précieux compléments au cours proprement dit.

L'ouvrage ne réclame comme prérequis que les notions de base concernant la théorie des groupes, l'algèbre linéaire sur les corps et la théorie des déterminants.

Collection.— Mathématiques en devenir



Calvage & Mounet

www.calvage-et-mounet.fr



Prix : 42 €