

Ahmed Lesfari

# Équations différentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles

Cours et exercices corrigés



ellipses

Références sciences



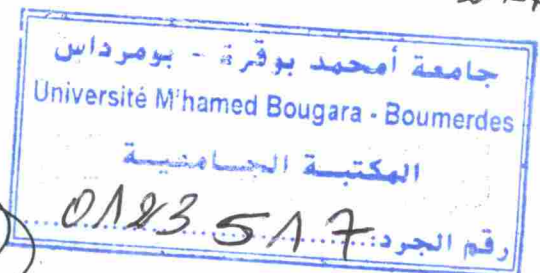
# Équations différentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles

Cours et exercices corrigés

Ahmed Lesfari



LEP



# Table des matières

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>1</b> | <b>Équations différentielles ordinaires</b>                           | <b>7</b>   |
| 1.1      | Généralités . . . . .   | 7          |
| 1.2      | Existence et unicité des solutions . . . . .                          | 13         |
| 1.3      | Continuité et différentiabilité des solutions . . . . .               | 22         |
| 1.4      | Équations résolubles . . . . .  | 26         |
| <b>2</b> | <b>Systèmes différentiels linéaires</b>                               | <b>59</b>  |
| 2.1      | Généralités . . . . .   | 59         |
| 2.2      | Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants . . . . .   | 71         |
| 2.2.1    | Résolution du système homogène . . . . .                              | 75         |
| 2.2.2    | Résolution du système non-homogène . . . . .                          | 83         |
| <b>3</b> | <b>Flot défini par une équation différentielle</b>                    | <b>87</b>  |
| 3.1      | Champ de vecteurs et flots . . . . .                                  | 87         |
| 3.2      | Commutativité des champs de vecteurs . . . . .                        | 92         |
| <b>4</b> | <b>Équations aux dérivées partielles</b>                              | <b>97</b>  |
| 4.1      | Équations aux dérivées partielles du 1 <sup>er</sup> ordre . . . . .  | 97         |
| 4.2      | Équations aux dérivées partielles du 2 <sup>ème</sup> ordre . . . . . | 110        |
| 4.3      | Équations de la physique mathématique . . . . .                       | 127        |
| <b>5</b> | <b>Problèmes divers</b>   | <b>137</b> |
| 5.1      | Étude via l'analyse de Fourier et la transformée de Laplace . . . . . | 137        |
| 5.1.1    | Rappel théorique . . . . .  | 137        |
| 5.1.2    | Résolution de quelques équations différentielles ordinaires . . . . . | 144        |
| 5.1.3    | Résolution de quelques équations aux dérivées partielles . . . . .    | 155        |
| 5.1.4    | Stabilité . . . . .   | 170        |
| 5.2      | Quelques équations non linéaires . . . . .                            | 177        |
| 5.2.1    | Le pendule simple . . . . .   | 177        |
| 5.2.2    | Le corps solide d'Euler . . . . .                                     | 180        |
| 5.2.3    | Solutions méromorphes d'équations différentielles . . . . .           | 184        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>6</b> | <b>Méthode de la diffusion inverse</b>                          | <b>193</b> |
| 6.1      | Introduction . . . . .  | 193        |
| 6.2      | Équation stationnaire de Schrödinger . . . . .                  | 196        |
| 6.3      | Équation intégrale de Gelfand-Levitan . . . . .                 | 206        |
| 6.4      | Équation de Korteweg-de Vries (KdV) . . . . .                   | 209        |
| <b>A</b> | <b>Formulation variationnelle des EDP</b>                       | <b>225</b> |
| A.1      | Espaces de Sobolev . . . . .                                    | 225        |
| A.2      | Problèmes de Dirichlet et de Neumann . . . . .                  | 230        |
| <b>B</b> | <b>Opérateurs pseudo-différentiels</b>                          | <b>241</b> |
| B.1      | Préliminaires . . . . .   | 242        |
| B.2      | Structures symplectiques . . . . .                              | 249        |
| B.3      | KdV, Heisenberg et Virasoro . . . . .                           | 253        |
| B.4      | Hierarchie KP et fonctions $\tau(t)$ . . . . .                  | 257        |
| <b>C</b> | <b>Surfaces de Riemann, fonctions et intégrales elliptiques</b> | <b>269</b> |
| C.1      | Surfaces de Riemann . . . . .                                   | 269        |
| C.2      | Fonctions et intégrales elliptiques . . . . .                   | 273        |
|          | <b>Bibliographie</b>  | <b>281</b> |
|          | <b>Index</b>  | <b>283</b> |

# Équations différentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles

Ce livre est destiné aux étudiants des niveaux L1, L2 et L3 ainsi qu'aux étudiants de master de mathématiques (M1, M2) pour certaines parties.

Le premier chapitre est consacré aux théorèmes d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles ordinaires, au problème de continuité et de différentiabilité de ces solutions ainsi qu'aux équations résolubles explicitement. Le chapitre 2 concerne l'étude des systèmes différentiels linéaires. Dans le chapitre 3, on étudie les champs de vecteurs et les flots définis par une équation différentielle. Le chapitre 4 est consacré à l'étude des équations aux dérivées partielles (EDP) du 1<sup>er</sup> ordre et du 2<sup>e</sup> ordre. Une partie importante est consacrée aux équations de la physique mathématique. Au chapitre 5, l'étude des équations différentielles sera faite *via* l'analyse de Fourier et la transformée de Laplace. On abordera aussi l'étude de la stabilité des solutions des équations différentielles. La fin du chapitre sera consacrée à la résolution de quelques équations non linéaires. Le chapitre 6 concerne la méthode de la diffusion inverse. On trouvera rassemblées aux annexes quelques notions sur la formulation variationnelle des EDP, les opérateurs pseudo-différentiels, les surfaces de Riemann, fonctions et intégrales elliptiques.

De nombreux exemples et exercices avec solutions se trouvent disséminés dans le texte.

*Ahmed Lesfari, titulaire d'un doctorat d'État en sciences mathématiques, est professeur de l'enseignement supérieur à l'université Chouaïb Doukkali, faculté des sciences, département de mathématiques, El Jadida, Maroc.*

