

# MÉCANIQUE QUANTIQUE

*Exercices corrigés et commentés*

# 1

Ibrahima Sakho

Préface par Jacques Bauche



**hermann**

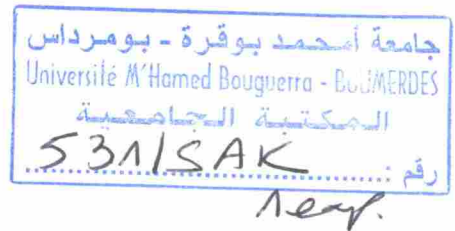
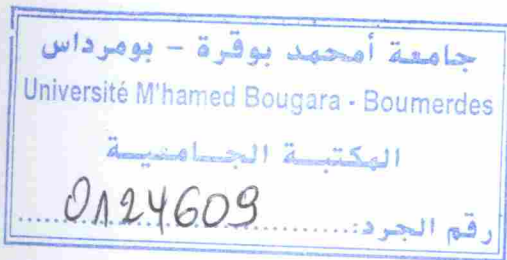
Ibrahima Sakho



# Mécanique quantique 1

Exercices corrigés et commentés

Préface par  
Jacques Bauché



HERMANN  ÉDITEURS

Depuis 1876

# Table des matières

PRÉFACE DE JACQUES BAUCHE.....	5
PRÉFACE.....	7
LU POUR VOUS.....	9
INTRODUCTION.....	11
PRINCIPALES CONSTANTES PHYSIQUES FONDAMENTALES.....	17
CHAPITRE 1 – LE PHOTON.....	21
<b>I. Rayonnement du corps noir, formule de Planck</b> .....	21
A. Répondre par vrai ou faux tout en justifiant.....	21
B. Choisir la bonne réponse.....	22
C. Exercices.....	23
C. 1 Loi de Stefan-Boltzmann, application.....	23
C. 2 Loi de déplacement de Wien.....	23
C. 3 Formule de Rayleigh-Jeans, « catastrophe ultraviolette ».....	23
C. 4 Formule de Planck.....	24
C. 5 Dédution de la loi de Wien à partir de la formule de Planck.....	24
C. 6 Densité d'énergie électromagnétique.....	25
<b>II. Effet photoélectrique : énergie du photon</b> .....	25
A. Répondre par vrai ou faux tout en justifiant.....	25
B. Choisir la bonne réponse.....	26
C. Exercices.....	27
C. 1 Mise en évidence de l'effet photoélectrique.....	27
C. 2 Équation d'Einstein.....	27
C. 3 Cellule photoélectrique, potentiel d'arrêt.....	28
C. 4 Mesure de la constante de Planck, longueur d'onde seuil d'une photocathode émissive.....	29
C. 5 Étude d'une photocathode émissive.....	29
C. 6 Principe de conservation de la quantité de mouvement.....	30
<b>III. Effet Compton : impulsion du photon</b> .....	30
A. Répondre par vrai ou faux tout en justifiant.....	30
B. Choisir la bonne réponse.....	31
C. Exercices.....	31

C. 1	Mise en évidence de l'effet Compton	31
C. 2	Diffusion arrière de Compton	32
C. 3	Établissement de la formule de Compton	32
C. 4	Effet Compton inverse	32
CHAPITRE 2 – MODÈLES ATOMIQUES, SPECTRE DE L'ATOME		
	D'HYDROGÈNE	37
I.	Modèle de l'atome pudding de Thomson	37
A.	Répondre par vrai ou faux tout en justifiant	37
B.	Choisir la bonne réponse	37
II.	Modèle de l'atome planétaire de Rutherford	37
A.	Répondre par vrai ou faux tout en justifiant	37
B.	Choisir la bonne réponse	38
III.	Modèle de l'atome quantifié de Bohr	38
A.	Répondre par vrai ou faux tout en justifiant	38
B.	Choisir la bonne réponse	38
IV.	Spectre de l'atome d'hydrogène	39
A.	Répondre par vrai ou faux tout en justifiant	39
B.	Choisir la bonne réponse	39
C.	Exercices	40
C. 1	Durée de vie de l'atome planétaire de Rutherford	40
C. 2	Principe de correspondance : quantification du moment cinétique	41
C. 3	Quantification du rayon de l'orbite électronique : rayon de Bohr	42
C. 4	Quantification de l'énergie de l'atome d'hydrogène	43
C. 5	Constante de Rydberg, effet de la masse finie du noyau	43
C. 6	Confirmation expérimentale du modèle de Bohr : expérience de Franck et Hertz	44
C. 7	Ionisation de l'atome d'hydrogène	46
C. 8	Série de Balmer	46
C. 9	Spectre de raies de l'hydrogène des étoiles, nébuleuse d'Orion	47
C. 10	Système hydrogénoïde	48
C. 11	Effet d'entraînement du noyau : découverte du deuton	49
CHAPITRE 3 – RELATION DE DE BROGLIE, INÉGALITÉS DE HEISENBERG		
I.	Dualité onde – corpuscule	53
A.	Répondre par vrai ou faux tout en justifiant	53
B.	Choisir la bonne réponse	53
II.	Relation de de Broglie	54
A.	Répondre par vrai ou faux tout en justifiant	54
B.	Choisir la bonne réponse	54

<b>III. Inégalités de Heisenberg</b> .....	54
A. Répondre par vrai ou faux tout en justifiant.....	54
B. Choisir la bonne réponse.....	55
C. Exercices.....	55
C. 1 Vitesses de phase et de groupe des ondes de de Broglie.....	55
C. 2 Dispersion des ondes de de Broglie.....	55
C. 3 Confirmation expérimentale de l'hypothèse de de Broglie : expérience de Davisson et Germer.....	56
C. 4 Vitesse de groupe des ondes de de Broglie dans le cas relativiste.....	58
C. 5 Dédution de l'hypothèse de de Broglie de la condition de quantification de Bohr.....	58
C. 6 Étude quantique de l'atome d'hydrogène (pour aller plus loin).....	58
 CHAPITRE 4 – ÉQUATION DE SCHRÖDINGER – APPLICATIONS.....	63
<b>I. Interprétation de la fonction d'onde</b> .....	63
A. Répondre par vrai ou faux tout en justifiant.....	63
B. Choisir la bonne réponse.....	63
<b>II. Équation de Schrödinger</b> .....	64
A. Répondre par vrai ou faux tout en justifiant.....	64
B. Choisir la bonne réponse.....	64
C. Exercices.....	64
C. 1 Dédution de l'équation de Schrödinger à partir de la relation de de Broglie.....	64
C. 2 Énergie de l'état fondamental de l'atome d'hydrogène.....	65
C. 3 Énergie quantifiée d'un système hydrogénoïde.....	66
C. 4 Particule dans un puits de potentiel de profondeur infinie.....	67
C. 5 Marche de potentiel de hauteur $U_0$ .....	67
C. 6 Marche de potentiel de profondeur finie.....	68
C. 7 Marche de potentiel en escalier.....	69
C. 8 Barrière de potentiel : effet tunnel.....	70
C. 9 Potentiel rectangulaire à deux dimensions.....	71
C. 10 Particule confinée dans une boîte cubique.....	71
C. 11 Puits de potentiel carré : états non liés.....	72
C. 12 Puits de potentiel carré : états liés.....	73
C. 13 Puits infiniment profond.....	74
C. 14 Émission froide.....	74
C. 15 Énergie de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique.....	75
C. 16 Énergie quantifiée de l'oscillateur harmonique.....	76
C. 17 Étude de la molécule HCl.....	77
 CHAPITRE 5 – MOMENTS CINÉTIQUE ET MAGNÉTIQUE – INTERACTION SPIN-ORBITE.....	81
<b>I. Nombres quantiques orbital et magnétique</b> .....	81

A. Répondre par vrai ou faux tout en justifiant.....	81
B. Choisir la bonne réponse.....	81
<b>II. Moment cinétique et magnétique de l'électron.....</b>	<b>81</b>
A. Répondre par vrai ou faux tout en justifiant.....	81
B. Choisir la bonne réponse.....	82
<b>III. Effet Zeeman normal, précession de Larmor.....</b>	<b>82</b>
A. Répondre par vrai ou faux tout en justifiant.....	82
B. Choisir la bonne réponse.....	82
<b>IV. Spin de l'électron, effet Zeeman complexe.....</b>	<b>83</b>
A. Répondre par vrai ou faux tout en justifiant.....	83
B. Choisir la bonne réponse.....	83
<b>V. Moment cinétique total d'un électron atomique, interaction spin-orbite.....</b>	<b>84</b>
A. Répondre par vrai ou faux tout en justifiant.....	84
B. Choisir la bonne réponse.....	84
<b>VI. Terme d'une configuration électronique des systèmes hydrogénoïdes.....</b>	<b>84</b>
A. Répondre par vrai ou faux tout en justifiant.....	84
B. Choisir la bonne réponse.....	84
C. Exercices.....	85
C.1 Expérience de Zeeman : quantification du moment cinétique, nombre quantique magnétique.....	85
C.2 Effet Zeeman normal sur la raie Lyman-alpha de l'atome d'hydrogène.....	85
C.3 Moment magnétique orbital : rapport gyromagnétique de l'électron.....	86
C.4 Magnéton de Bohr.....	86
C.5 Triplet de Zeeman-Lorentz : application de la règle des fréquences de Bohr, précession de Larmor.....	88
C.6 Effet Zeeman normal : détermination du triplet de Zeeman-Lorentz par application de l'équation de Schrödinger.....	89
C.7 Expérience de Stern et de Gerlach.....	90
C.8 Spin de l'électron : Hypothèse de Goudsmit et Uhlenbeck.....	91
C.9 Exploitation de l'expérience de Stern et de Gerlach : intensités des tâches.....	92
C.10 Moment cinétique total de l'électron, termes spectroscopiques.....	93
C.11 Illustration de l'effet Zeeman normal sur le niveau $2p$ des systèmes hydrogénoïdes.....	93
C.12 Illustration de l'effet Zeeman anormal sur le niveau fondamental des systèmes hydrogénoïdes.....	93
C.13 Illustration de l'effet Zeeman anormal sur le niveau $2p$ des systèmes hydrogénoïdes.....	94
C.14 Notation spectroscopique des états d'un atome monoélectronique.....	94

C.15 Structure fine de la raie de résonance de l'atome d'hydrogène.....	94
C.16 Structure fine du niveau $n = 2$ de l'atome d'hydrogène.....	95
C.17 Illustration de l'effet Zeeman complexe sur la raie jaune du sodium.....	96
CHAPITRE 6 – FORMALISME DE BASE DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE,	
ALGÈBRE DES COMMUTATEURS.....	99
I. Opérateur linéaire, commutation.....	99
A. Répondre par vrai ou faux tout en justifiant.....	99
B. Choisir la bonne réponse.....	99
II. Opérateur hermitique.....	100
A. Répondre par vrai ou faux tout en justifiant.....	100
B. Choisir la (ou les) bonnes réponses.....	100
III. Bases orthonormées discrètes.....	100
A. Répondre par vrai ou faux tout en justifiant.....	100
B. Choisir la bonne réponse.....	101
IV. Notation de Dirac.....	101
A. Répondre par vrai ou faux tout en justifiant.....	101
B. Choisir la bonne réponse.....	102
V. Équation aux valeurs propres, observables.....	102
A. Répondre par vrai ou faux tout en justifiant.....	102
B. Choisir la bonne réponse.....	103
VI. Représentation des vecteurs et des opérateurs.....	104
B. Choisir la bonne réponse.....	104
C. Exercices.....	104
C. 1 Propriétés des commutateurs.....	104
C. 2 Propriétés du produit scalaire.....	105
C. 3 Trace d'un opérateur.....	105
C. 4 Fonction d'opérateurs.....	105
C. 5 Commutateurs de fonctions d'opérateurs.....	105
C. 6 Règles de dérivation d'opérateurs.....	106
C. 7 Opérateur unitaire.....	106
C. 8 Matrices de Pauli.....	106
C. 9 Opérateur densité.....	107
C. 10 Opérateur d'évolution.....	107
C. 11 Observables associées au spin.....	108
C. 12 Évolution d'un spin $1/2$ dans un champ magnétique uniforme : précession de Larmor.....	108
C. 13 Opérateur moment cinétique orbital.....	109
C. 14 Quantification de l'opérateur carré moment cinétique orbital.....	110
C. 15 Moment cinétique en coordonnées sphériques.....	110

C.16 Quantification de l'énergie de l'atome d'hydrogène dans le cas général.....	111
CHAPITRE 7 – POSTULATS DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE	
I. Description de l'état d'un système.....	115
A. Répondre par vrai ou faux tout en justifiant.....	115
II. Description des grandeurs physiques.....	115
B. Choisir la bonne réponse.....	115
III. Mesure des grandeurs physiques.....	116
A. Répondre par vrai ou faux tout en justifiant.....	116
B. Choisir la bonne réponse.....	116
IV. Réduction du paquet d'ondes.....	116
A. Répondre par vrai ou faux tout en justifiant.....	116
B. Choisir la bonne réponse.....	117
V. Évolution des systèmes dans le temps.....	117
A. Répondre par vrai ou faux tout en justifiant.....	117
B. Choisir la bonne réponse.....	117
VI. Propriétés générales de l'équation de Schrödinger.....	117
A. Répondre par vrai ou faux tout en justifiant.....	117
C. Exercices.....	118
C. 1 Théorème d'Ehrenfest, lien avec la mécanique classique.....	118
C. 2 Système conservatif.....	118
C. 3 Constante du mouvement, bons nombres quantiques.....	119
C. 4 Évolution des valeurs moyennes des opérateurs associés à la position et à l'impulsion : étalement d'un paquet d'ondes libres.....	119
C. 5 Évolution des valeurs moyennes des opérateurs associés à la position et à l'impulsion : lien avec la mécanique classique.....	119
C. 6 Influence des états excités sur la distance moyenne entre les atomes de la molécule HCl.....	120
C. 7 Puits de potentiel infini : mesures des énergies, évolution du paquet d'ondes, relation d'incertitude temps-énergie.....	120
C. 8 Étude d'un système conservatif.....	122
C. 9 Mesure simultanée de grandeurs physiques associées à des d'observables formant un E.C.O.C.....	122
C.10 Ensembles complets d'observables qui commutent (E.C.O.C).....	123
C.11 Évolution de l'opérateur densité.....	123
C. 12 Évolution d'un spin 1/2 dans un champ magnétique uniforme.....	124
C.13 Valeurs moyennes relatives aux propriétés des systèmes hydrogénoïdes, confrontation avec les prévisions de Bohr.....	125



## COMPLÉMENTS

<b>A. Densité spectrale d'énergie électromagnétique : formule de Planck</b> .....	129
1. Caractéristiques du photon.....	129
2. Loi de Planck.....	131
<b>B. Loi de Planck et théorie d'Einstein</b> .....	140
1. Principaux processus d'interaction matière-rayonnement optique.....	140
2. Théorie d'Einstein des processus d'absorption et d'émission.....	142
<b>C. Loi de Stefan</b> .....	146
1. Établissement de la loi empirique de Stefan par voir thermodynamique.....	146
2. Établissement par Boltzmann de la loi de Stefan.....	150
<b>D. Calcul des termes de l'hamiltonien de structure fine des systèmes hydrogénéoïdes</b> .....	154
1. Énergie de Bohr des systèmes hydrogénéoïdes.....	154
2. Énergie semi-relativiste des systèmes hydrogénéoïdes.....	157
3. Énergie relativiste des systèmes hydrogénéoïdes.....	159
4. Calculs des termes de l'hamiltonien de structure fine.....	166
<b>E. Fonctions d'onde générales des systèmes hydrogénéoïdes</b> .....	189
1. Nécessité d'utiliser les coordonnées sphériques.....	189
2. Résolution de l'équation de Schrödinger.....	190
3. Premières fonctions d'onde normalisées.....	204
<b>SOLUTIONS DES EXERCICES</b> .....	207
<b>Chapitre 1</b> .....	209
<b>Chapitre 2</b> .....	231
<b>Chapitre 3</b> .....	255
<b>Chapitre 4</b> .....	267
<b>Chapitre 5</b> .....	311
<b>Chapitre 6</b> .....	339
<b>Chapitre 7</b> .....	373
<b>BIBLIOGRAPHIE</b> .....	407

Ibrahima Sakho

# MÉCANIQUE QUANTIQUE 1

*Exercices corrigés et commentés*

Préface par Jacques Bauche

Cet ouvrage est un recueil d'exercices de factures diverses nécessaires à l'assimilation de l'ensemble des notions de Mécanique Quantique étudiées en Licence 2 MPC1 (Mathématique, Physique, Chimie, Informatique) des Universités francophones ayant adopté le système LMD (Licence Master Doctorat). Il constitue un réel outil de travail articulé autour des concepts indispensables de la Mécanique Quantique en tant que science fondamentale pour la compréhension des propriétés des atomes, des noyaux, des molécules, des lasers, des solides, des matériaux, de l'électronique, bref, de tout l'infiniment petit. De nombreuses applications de l'équation de Schrödinger y sont exposées de façon claire et très détaillée et diverses propriétés quantiques relatives à l'atome d'hydrogène et aux ions hydrogénoïdes y sont traitées.

*Grosso modo* ce recueil d'exercices riches, variés et assortis de commentaires fournis, fait le pari d'assurer à l'étudiant en deuxième année, la maîtrise des outils quantiques indispensables pour aborder avec aisance les programmes de Mécanique Quantique 2 et de Physique Atomique et Nucléaire en licence 3 de Physique. Ce livre intéressera également les universitaires responsables des enseignements en Mécanique Quantique et en Physique Atomique pour la préparation des séries de travaux dirigés.

*Ibrahima Sakho, ancien élève de l'École Normale supérieure de Dakar, Docteur en Physique Atomique et Nucléaire, est enseignant à l'Université de Ziguinchor (Sénégal) et responsable des cours de Mécanique Quantique 1 et 2 et de Physique Atomique et Nucléaire. Il est chercheur dans le domaine de la photoionisation résonnante des systèmes atomiques polyélectroniques multichargés.*

ÉDITIONS  HERMANN  
Depuis 1876

[www.editions-hermann.fr](http://www.editions-hermann.fr)

ISBN 978 2 7056 8275 0



33 €